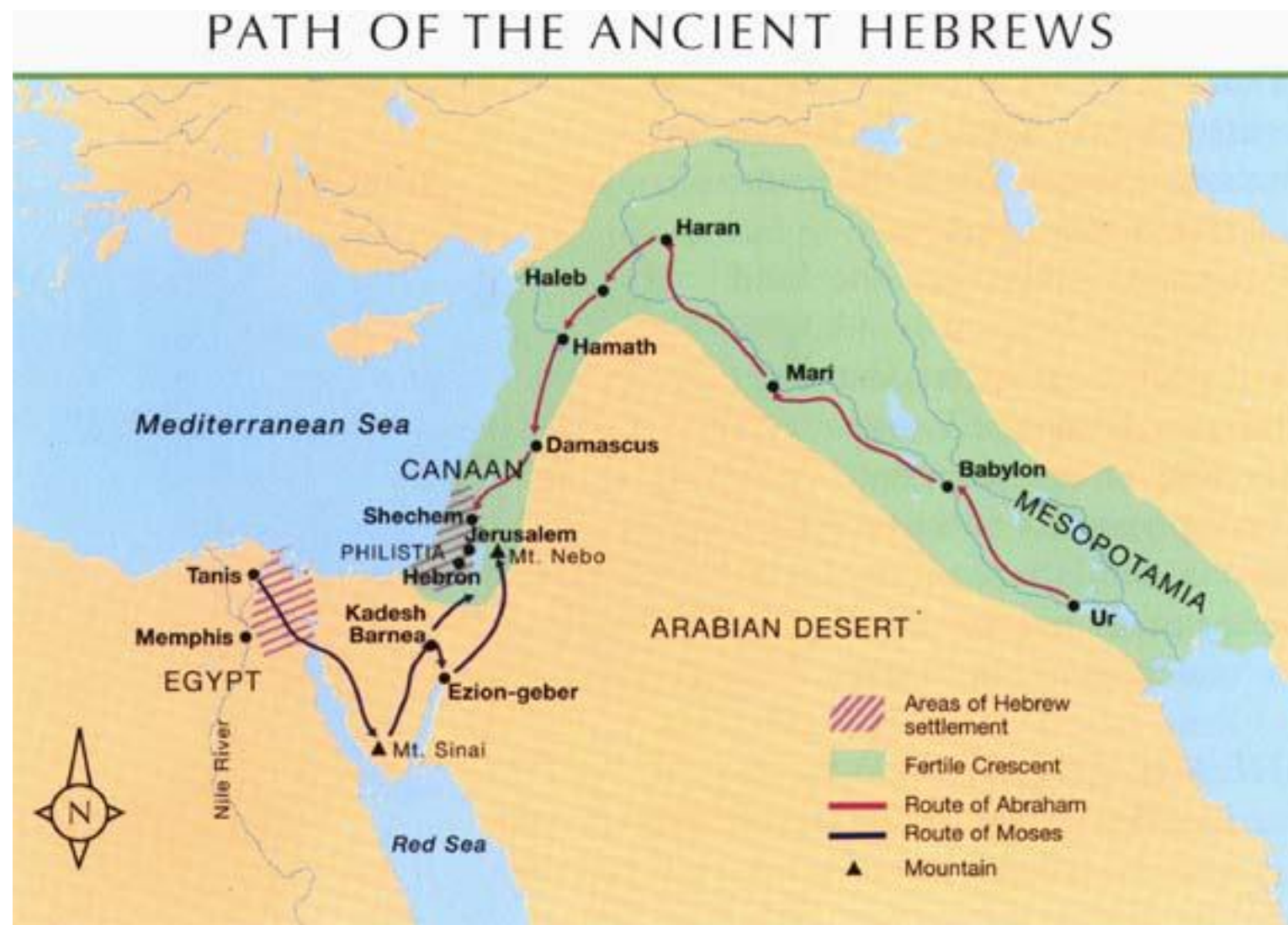


וַיִּקַּח תֶּרַח אֶת-אַבְרָם בְּנוֹ, וְאֶת-לוֹט בֶּן-הָרֹן בֶּן-בְּנוֹ, וְאֵת שָׂרִי כַלְתּוֹ, אִשְׁת־אַבְרָם בְּנוֹ
 .; וַיֵּצְאוּ אֹתָם מֵאוּר כַּשְׁדִּים, לָלֶכֶת אֶרְצָה כְּנָעַן, וַיָּבֹאוּ עַד-חָרֹן, וַיֵּשְׁבוּ שָׁם
 } וַיְהִיו יָמֵי-תֵרַח, חֲמִשׁ שָׁנִים וּמֵאתַיִם שָׁנָה; וַיָּמָת תֵּרַח, בְּחָרֹן. } פ לב



STORY from 2000 BC (Akkadian)

Schoolboy, where did you go?

I went to school.

What did you do in school?

I read my tablet, ate my lunch,
prepared my tablet, wrote it, finished it, then,
upon the school's dismissal, I went home,.....

I spoke to my father....

Read the tablet to him, my father was pleased...

I said: 'I want to go to sleep, wake me early in the
morning,

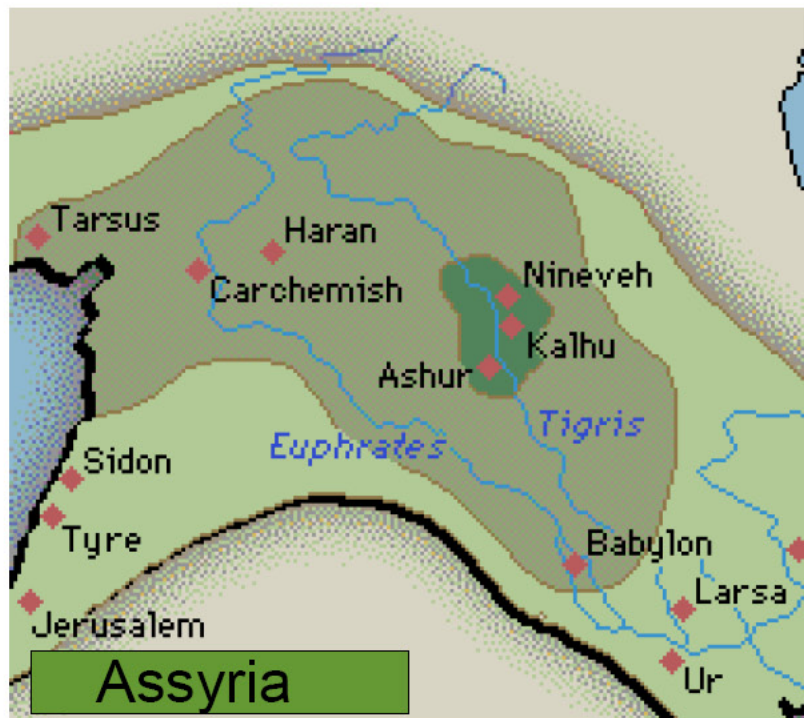
I must not be late, or my teacher will cane me..

(taken from E. Kramer, *The Nature and Growth of Modern
Mathematics*)

Babylonian Mathematics¹

1 Introduction

Our first knowledge of mankind's use of mathematics comes from the Egyptians and Babylonians. Both civilizations developed mathematics that was similar in scope but different in particulars. There can be no denying the fact that the totality of their mathematics was profoundly elementary², but their astronomy of later times did achieve a level comparable to the Greeks.



2 Basic Facts

The Babylonian civilization has its roots dating to 4000BCE with the Sumerians in Mesopotamia. Yet little is known about the Sumerians. Sumer was first settled between 4500 and 4000 BC by a non-Semitic

¹©2002, G. Donald Allen

²Neugebauer, 1951

For our purposes we will use just the first two symbols

$$\vee = 1 \qquad \sphericalangle = 10$$

All numbers will be formed from these.

Example:

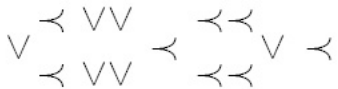
$$\begin{array}{l} \sphericalangle \sphericalangle \quad \vee \vee \vee \\ \sphericalangle \sphericalangle \sphericalangle \vee \vee \vee \vee \end{array} = 57$$

Note the notation was **positional** and **sexagesimal**:

$$\sphericalangle \sphericalangle \quad \sphericalangle \sphericalangle = 20 \cdot 60 + 20$$

$$\vee \vee \quad \vee \vee \quad \sphericalangle \vee = 2 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 21 = 7,331$$

Example



$$\begin{aligned} 1; 24, 51, 10 &= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \\ &= 1.41421296 \end{aligned}$$

Fractions. Generally the only fractions permitted were such as

$$\frac{2}{60}, \frac{3}{60}, \frac{5}{60}, \frac{12}{60}, \dots$$

because the sexagesimal expression was known. For example,

$$\frac{1}{6} = \frac{10}{60} = ; \prec$$

$$\frac{1}{9} = ; \vee \vee \vee \prec \prec$$

Irregular fractions such as $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, etc were not normally not used. There are some tablets that remark, “7 does not divide”, or “11 does not divide”, etc.

A table of all products equal to sixty has been found.

2	30	16	3, 45
3	20	18	3,20
4	15	20	3
5	12	24	2,30
6	10	25	2,25
8	7,30	27	2,13,20
9	6,40	30	2
10	6	32	1;52,30
12	5	36	1,40
15	4	40	1,30

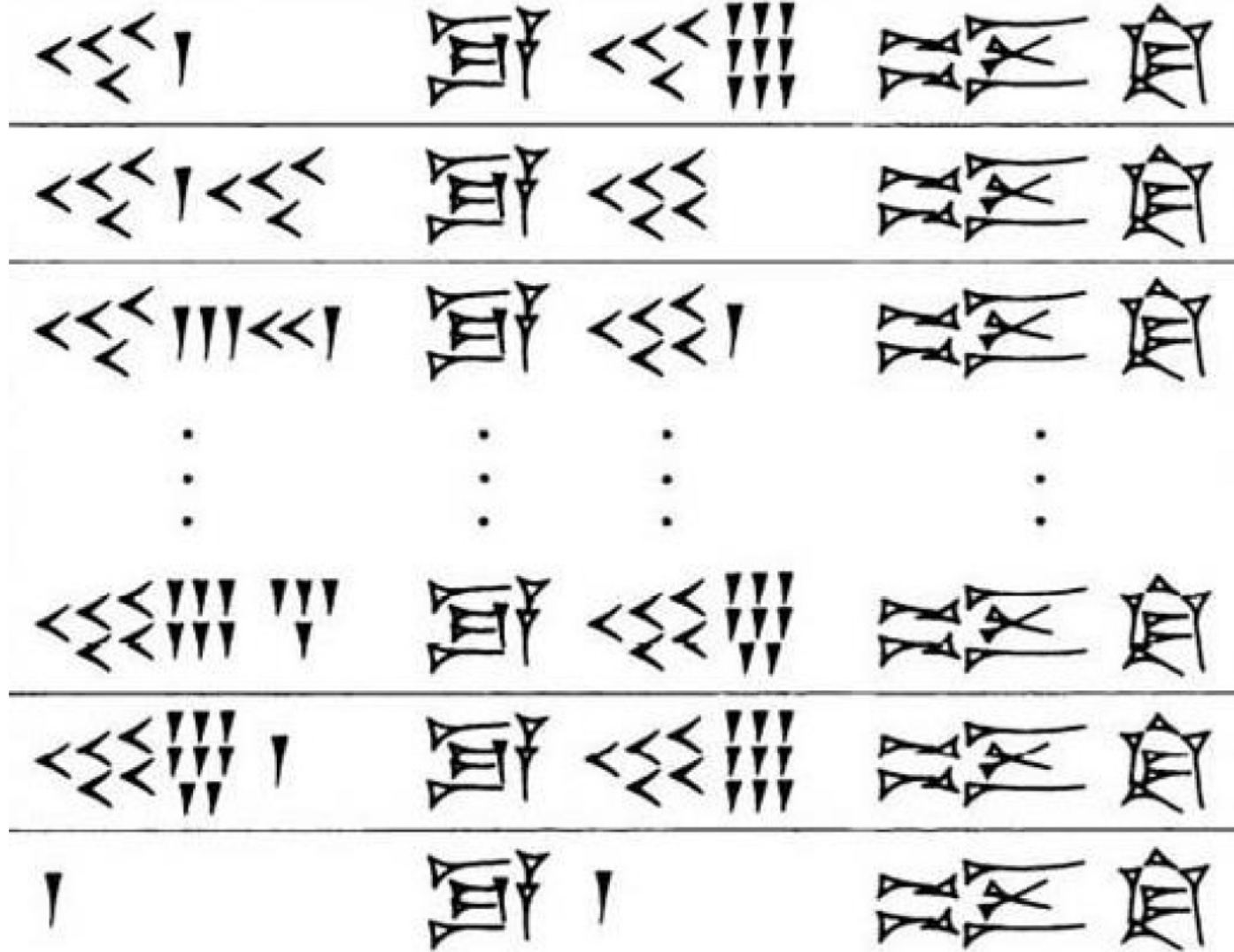


Figure 3 Tablet from Larsa



Figure 4 Plimpton 322

Look at the photograph and notice the main features of what remains: four columns of numbers, with words at the head of each column. Now look at the transcription (we have labelled the columns A, B, C for ease of reference), and see if any pattern is evident to you

A	B	C	
[1;59,0,]15	1,59	2,49	1
[1;56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1;55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	
[1;]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1;]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1;]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1 ;]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1;]41,33,45,14,3,45	13,19	20,49	8
[1;]38,33,36,36	9,1	12,49	9
1;35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1 ;33,45	45	1,15	11
1;29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1;]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1;25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1;]23.13,46,40	56	53	15

catalogued as a 'commercial account'.) But Neugebauer discovered—presumably after a considerable amount of conjecture and refutation—that the numbers in each line can be related as:

$$A = \frac{C^2}{C^2 - B^2},$$

and this was the basis for his reconstruction of the illegible entries. Let us check this out on the simplest looking complete case, line 11.

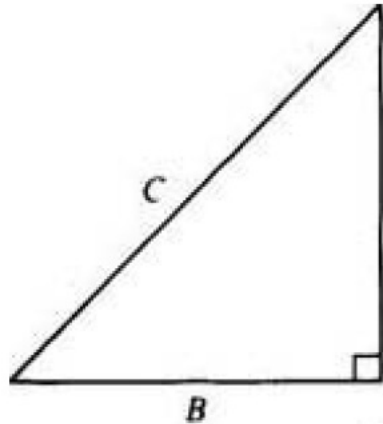
$$B^2 = 45^2 = 2025 \text{ (working in decimals);}$$

$$C^2 = 75^2 = 5625;$$

$$\frac{C^2}{C^2 - B^2} = \frac{5625}{3600} = 1 \frac{2025}{3600} = 1 \frac{33}{60} \frac{45}{3600} = 1;33,45 = A, \text{ as claimed.}$$

So it is possible to find a relation, albeit a somewhat devious one, between the columns of the tablet. (In fact, for this to hold consistently throughout, the underlined numbers have to be considered as mistakes by the scribe, a point to which we shall return.) Before trying to decide what this is all about, let us investigate the numbers a little more. If we calculate $C^2 - B^2$ for each entry, and then take its square root, something rather surprising emerges. Look at the next table, in which we have calculated the values (and the scribe's 'errors' have been corrected'). Ignore for the time being the final two columns which we have labeled p and q .

B	C	$D = \sqrt{C^2 - B^2}$		p	q
		(decimal)	(sexagesimal)		
119	169	120	2,0	12	5
3367	4825	3456	57,36	64	27
4601	6649	4800	1,20,0	75	32
12709	18541	13500	3,45,0	125	54
65	97	72	1,12	9	4
319	481	360	6,0	20	9
2291	3541	2700	45,0	54	25
799	1249	960	16,0	32	15
481	769	600	10,0	25	12
4961	8161	6480	1,48,0	81	40
45	75	60	1,0		
1679	2929	2400	40,0	48	25
161	289	240	4,0	15	8
1771	3229	2700	45,0	50	27
56	106	90	1,30	9	5



Approximate ratios for line 1.



Approximate ratios for line 15.

מושג המספר ("טבעי")

(1) מושג מופשט: ה"תכונה המשותפת" לכל הקבוצות בעלות מספר איברים זהה.

(לא ניכנס לבירור משמעות הקביעה של **מספר איברים זהה**).

כך ניתן לכתוב: תפוח + אגס = שני פירות.....

(2) הצגת המספר: הבבלים המציאו את **שיטת הפוזיציה**, כלומר,

$$\lll, \ll, \forall \forall; \lll = (20,12;30) = 20 \cdot 60 + 12 + \frac{30}{60} = 1212.5$$

בסיס הספירה הוא 60

שאלה: האם המספר הטבעי הוא "מן הטבע" או "יצירת האדם"?

(3) הצגת שברים: האם ניתן להציג כל שבר (יחס בין טבעיים) בשיטה זאת?

הבבלים ידעו כי זה בלתי אפשרי.

דוגמה: לתאר את השבר

$\frac{1}{7}$ בשיטה עשרונית

רעיון הוכחת אי-אפשרות: נניח כי

$$\frac{1}{7} = 0.abcd$$

אזי נכפיל ב-10000 ונקבל כי הוא מתחלק ב-7.



platon

aristoteles

epicurus

pythagoras

euclides

פיתגורס---ראשון המתמטיקאים



נקודות ציון ביוגרפיות

נולד 569 לפנה"ס באי סאמוס

535 לפנה"ס עבר למצרים ללימודים

היסטוריה ישראלית

586 לפנה"ס חורבן בית ראשון

גלות בבל

516 לפנה"ס חנוכת בית המקדש
השני

525 לפנה"ס מצרים נכבשת על ידי פרס

נלקח כשבוי לבבל ושם לומד מתימטיקה

520 לפנה"ס חוזר לאי סאמוס

518 לפנה"ס עובר לדרום איטליה

מייסד את האסכולה הפיתאגורית

האסכולה הפיתאגורית: מעמד מקודש למספרים הטבעיים ויחסיהם (שברים פשוטים)

הם מבטאים את ה"יחסים ההרמוניים" בטבע

"משפט פיתאגורס" היה כנראה ידוע להם, אך לא ברור אם ידעו "להוכיח" אותו.

Quotations by Pythagoras

Number rules the universe.

Quoted in D MacHale, *Comic Sections* (Dublin 1993)

Number is the ruler of forms and ideas, and the cause of gods and demons.

Iamblichus

Every man has been made by God in order to acquire knowledge and contemplate.

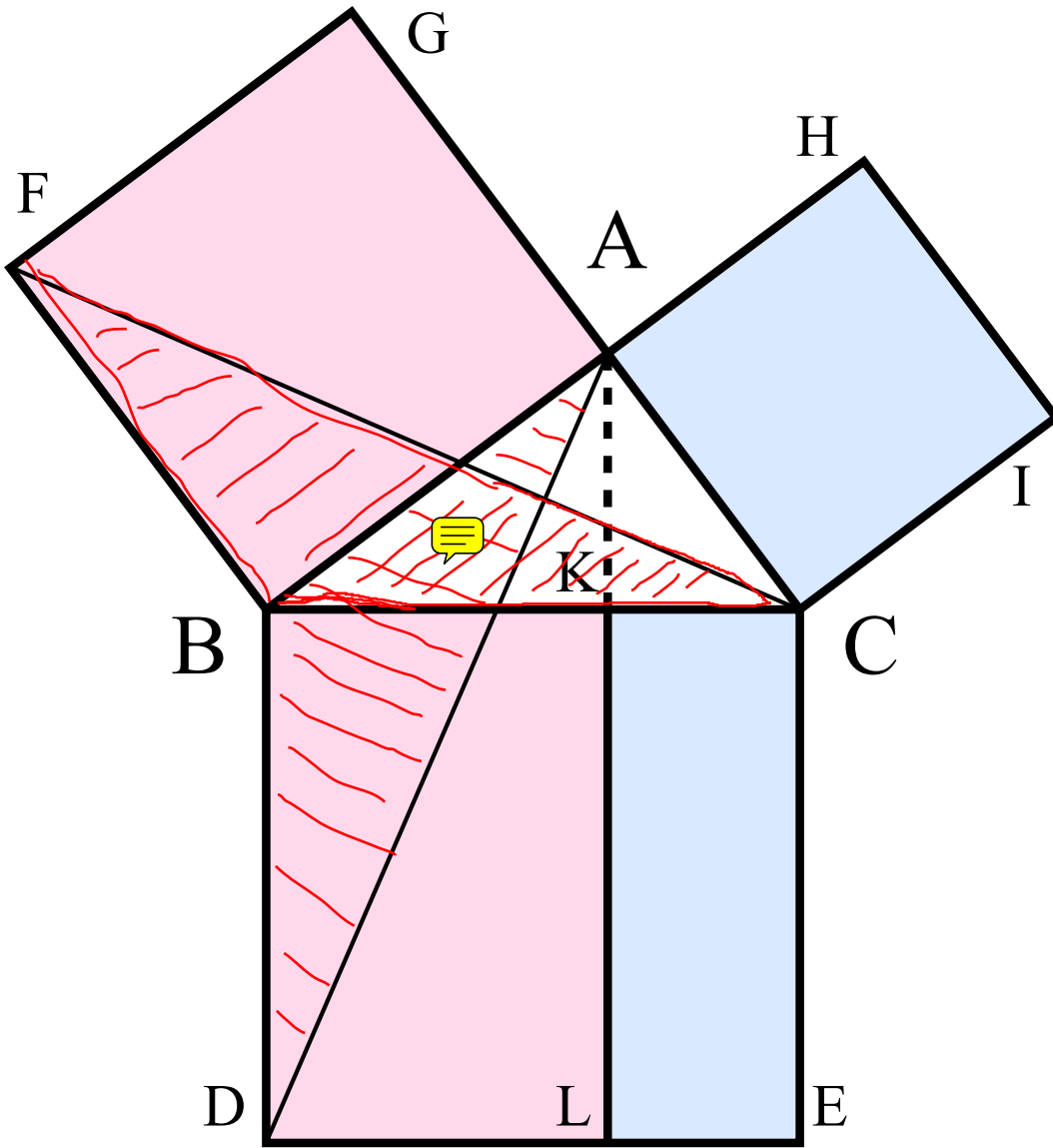
Geometry is knowledge of the eternally existent.

Number is the within of all things.

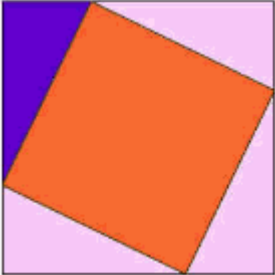
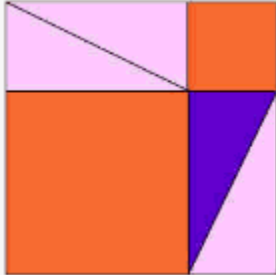
There is geometry in the humming of the strings.

As long as man continues to be the ruthless destroyer of lower living beings he will never know health or peace. For as long as men massacre animals, they will kill each other.

As soon as laws are necessary for men, they are no longer fit for freedom.



Pythagoras Theorem---A “Visible Proof”



$$A^2 + B^2 = C^2$$

שלישיית מספרים כזאת נקראת **שלושה פיתגורית**.

למשל: 3,4,5 או 5,12,13... לשלושת כאלה היתה משמעות מיוחדת.

כיצד ניתן למצוא עוד שלושת כאלה? האם ניתן למצוא רשימה של כולן?

ניזכר בנוסחה:

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$$

ניקח שני מספרים טבעיים P,Q ונחשב:

$$(P^2 + Q^2)^2 = P^4 + 2P^2Q^2 + Q^4$$

ובאותו אופן

$$(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$$

כלומר

$$(P^2 - Q^2)^2 = P^4 - 2P^2Q^2 + Q^4$$

ולסיכום:

$$(P^2 + Q^2)^2 = P^4 + 2P^2Q^2 + Q^4$$

$$(P^2 - Q^2)^2 = P^4 - 2P^2Q^2 + Q^4$$

ובחיסור:

$$(P^2 + Q^2)^2 - (P^2 - Q^2)^2 = 4P^2Q^2 = (2PQ)^2$$

סיכום: לכל בחירת שני מספרים טבעיים P, Q השלשה

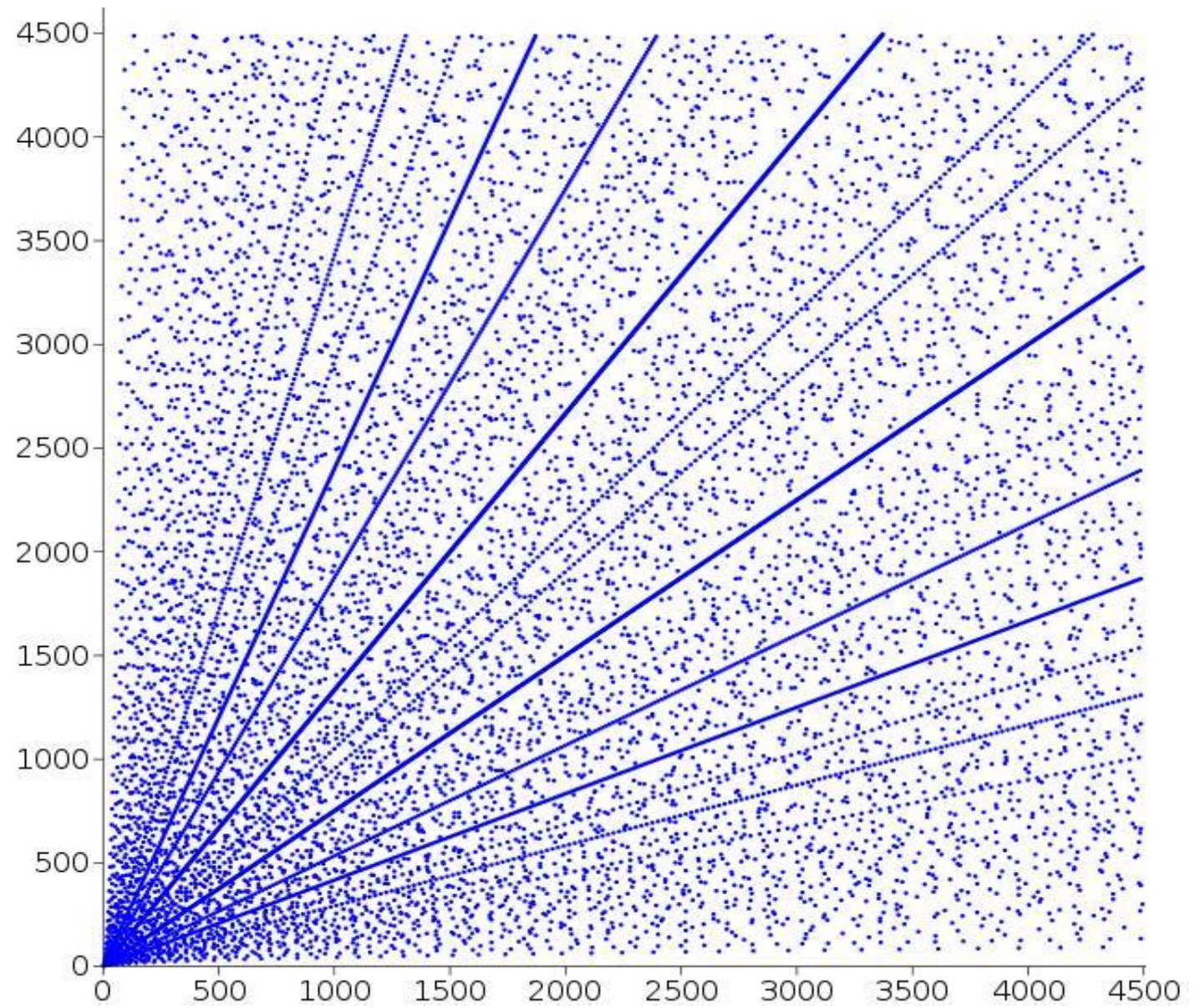
$$\underline{P^2 + Q^2, P^2 - Q^2, 2PQ}$$

היא פיתאגורית! הנוסחה הזאת נקראת נוסחת אוקלידס (ספר עשירי של "אלמנטים").

$$P = 2, Q = 1 \Rightarrow P^2 + Q^2 = 5, P^2 - Q^2 = 3, 2PQ = 4$$

$$\underline{P = 3, Q = 2 \Rightarrow P^2 + Q^2 = 13, P^2 - Q^2 = 5, 2PQ = 12}$$

שלוש פיתאגוריות $1 \leq A, B \leq 4500$



מבוכה רבתי (שנשמרה בסוד) באסכולה הפיתאגורית

מהו אורך היתר במשולש ישר-זווית שניצביו באורך אחד?

$$C^2 = 1 + 1 = 2$$

האם $C = \frac{m}{n}$???????

תשובה: אי-אפשר!! (אוקלידס, ספר שלישי של "יסודות")

הוכחה: נניח שכן וזהו שבר מצומצם...

$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m = 2k$ (אם ריבוע הוא זוגי גם המספר הוא זוגי).

$$m^2 = 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n = 2l$$

אנו אומרים על $\sqrt{2}$ כי הוא אירציונלי..... אפלטון אמר:

He is unworthy of the name of man who is ignorant of the fact that the diagonal of a square is incommensurable with its side.